22/04/2015

Φυλλάδιο #6

Άσκηση 1

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Από την θεωρία A ορθογώνιος <=> οι στήλες του A ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

α' τρόπος: Ουσιαστικά θέτουμε g_1, g_2 τις 2 πρώτες στήλες του A και το πρόβλημα είναι να βρούμε g_3, g_4 ώστε g_1, g_2, g_3, g_4 ορθ. βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε ως εξής. Θέτουμε $W = \langle g_1, g_2 \rangle$. $L = W^\perp$ Υπολογίζουμε βάση του L και με Gram-Schmidt βρίσκουμε ορθ. βάση g_3, g_4 του L

β' τρόπος: Αναζητούμε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & y & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνιος

- Πρέπει <1η στήλη, 3η στήλη> = 0 <=>

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x+y+z=0 \quad (1)$$

- Πρέπει <2η στήλη, 3η στήλη> = 0 <=>

$$\frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{3z}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow x+2y-3z=0 \quad (2)$$

Πρέπει <3η στήλη, 3η στήλη> = 1 <=> $x^2+y^2+z^2=1$ (3)

Οι (1), (2) => γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Γρ.Ι}} \begin{matrix} x + 5z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{matrix}$

Με λύσεις $\left\{ \begin{bmatrix} -5z \\ 4z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$ Η (3) => $25z^2 + 16z^2 + z^2 = 1$ => $42z^2 = 1$. Θέτουμε $z = \frac{1}{\sqrt{42}}$. Άρα $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ $y = \frac{4}{\sqrt{42}}$

Άσκηση 2

α) Όπως στην άσκηση 6 στο φυλλάδιο #4 δείχνουμε < , > εσωτ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.

β) Θα δείξουμε τώρα T. ισομετρία (1-1, ΕΠΙ, ~~[illegible]~~) $T\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle$

1-1-ΕΠΙ: Έστω $e = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε $[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Από γραμμική I, αφού $[T]_e^e$ αντιστρέψιμος => T ισομορφισμός άρα 1-1 και ΕΠΙ

Έστω (a_1, a_2, a_3) $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ Ο.δ.ο. $\langle T(a_1,a_2,a_3), T(b_1,b_2,b_3)\rangle = \langle (a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\rangle$

Έχουμε $\langle T(a_1,a_2,a_3), T(b_1,b_2,b_3)\rangle = \langle (a_1 2, a_2\sqrt{2}, \ldots$ [illegible] $\ldots b_3 2\sqrt{2})\rangle =$

$= 4\frac{a_1 b_1}{2}\frac{}{2} + 2\frac{a_2}{\sqrt2}\frac{b_2}{\sqrt2} + 8\frac{a_3}{2\sqrt2}\frac{b_3}{2\sqrt2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \langle (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3)\rangle$ και
Άρα T ισομετρία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν $(V,\langle\ \rangle)$, $(W,\langle\ \rangle)$ Χ.Ε.Γ με $\dim_{\mathbb{R}}V = \dim_{\mathbb{R}}W$ πεπερασμένη και $T: V \to W$ γραμμική έχουμε δείξει T ισομετρία $\Leftrightarrow \langle T(v), T(z)\rangle = \langle v,z\rangle$ για κάθε $v, z \in V$

Άσκηση 3

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ $(W,\langle\ \rangle')$ Χ.Ε.Γ πεπερ. διάστασης με $\dim_{\mathbb{R}}V = \dim_{\mathbb{R}}W$.
Απ' την θεωρία έχουμε τον εξής αλγόριθμο που μας δίνει ισομετρία
$T: V \to W$ ΒΗΜΑ 1ο: Θέτουμε $n = \dim_{\mathbb{R}}V = \dim_{\mathbb{R}}W$
ΒΗΜΑ 2ο Βρίσκουμε με Gram-Schmidt $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση του V και $g = (g_1, g_n)$ ορθ. βάση του W.
ΒΗΜΑ 3ο: $T: V \to W$ με $T(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n$ για $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$
Τότε T ισομετρία (δηλ. T γραμμική, 1-1, ΕΠΙ και ισομετρία)
Για το $(\mathbb{R}^3, \langle\ \rangle)$ έχουμε ότι κανονική βάση $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$ είναι ορθοκανονική βάση. Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στην βάση $1, x, x^2$ στου $\mathbb{R}_2[x]$ και μετά τις πράξεις έχουμε ότι $g = (g_1, g_2, g_3)$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ όπου $g_1 = 1$, $g_2 = \sqrt{12}(x - 1/2)$, $g_3 = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}(x^2 - x - \frac{1}{6})$
Επομένως, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ με $T((a,b,c)) = T(ae_1 + be_2 + ce_3) = ag_1 + bg_2 + cg_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ είναι ισομετρία

Άσκηση 4

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ν.δ.ο παριστάνει στροφή

ΒΗΜΑ 1ο: Αφού οι στήλες του A ορθ. βάση του $\mathbb{R}^{3\times1}$ έχουμε A ορθογώνιος. Επομένως, Θ. Euler εφαρμόζεται

ΒΗΜΑ 2ο $\det A = 1$ και $A \neq I_3$. Θέτουμε $W = V_A(1)$ (δηλ. $X = W \Rightarrow AX = X$)
Από θεωρία $\dim W = 1$ και η A παριστάνει στροφή ως προς γωνία φ στο επίπεδο κάθετο ως προς το W, όπου φ υπολογίζεται απ' τον τύπο $1 + 2\cos\varphi = \mathrm{Tr}A$ (1). Από (1) $\Rightarrow 1 + 2\cos\varphi = -1 \Leftrightarrow 2\cos\varphi = -2 \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$
Ο άξονας $\varepsilon = W = V_A(1)$ Υπολογίζουμε $V_A(1)$. Μετά τις πράξεις $V_A(1) =$

$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

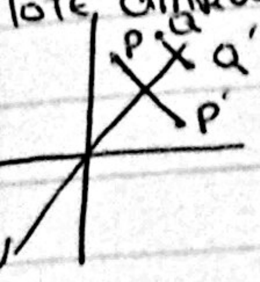
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ ορθογώνιος με $\det A=-1$ και $A\neq I_3$ εφαρμόζουμε την αντίστοιχη περίπτωση του Θ. Euler (προσοχή στις διαφορές! (π.χ $V_A(-1)=W$ και $-1+2\cos\varphi=\mathrm{Tr}A$)

Άσκηση 5

$A=\begin{bmatrix}1/2 & 3/2\sqrt{3}\\ 3/2\sqrt{3} & -1/2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ Φανερά οι στήλες του A αποτελούν ορθ. βάση του $\mathbb{R}^2$ ως προς το σύνηθες εσ. γινόμενο.

Επομένως, ο A είναι ορθογώνιος. $\det A=-1$. Θέτουμε $W=V_A(+1)$.

Τότε $\dim_{\mathbb{R}}W=1$ και ο A παριστάνει ορθογώνια ανάκλαση ως προς W



Μετά τις πράξεις $V_A(+1)=\left\{\begin{bmatrix}3/\sqrt{3}\,y\\ y\end{bmatrix} : y\in\mathbb{R}\right\}$

Άξονας κατοπτρισμού